E.N.S.I.E.T.A. I977 ×I53×

M A T H E M A T I Q U E S II (4 h)

Le problème comporte quatre parties, dont les trois dernières sont indépendantes.

Dans tout le problème, a et b sont deux réels strictement positifs, p et q deux entiers relatifs non nuls, premiers entre eux, distincts.

E_2 est un plan réel euclidien, rapporté à un repère orthonormé $(O\ \vec{i}\ \vec{j})$

les axes x'Ox et y' Oy sont définis par les vecteurs unités $\vec{i}$ et $\vec{j}$. t est un paramètre réel.

Dans la partie IV, E_2 est le plan x O y d'un espace réel euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ \vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k})$ et t représente le temps.

- I -

I.1 - *m* et *n* étant deux entiers positifs premiers entre eux, montrer que les restes des divisions par *n* de

0, m, 2 m, ... (n - 1) m sont deux à deux distincts et par suite forment une permutation de l'ensemble *(0, 1, 2, ... n-1)*

I.2 - $\vec{D_1}$ (respectivement $\vec{D_2}$) étant l'axe issu de O, tel que $(O\vec{x}, \vec{D_1}) = pt_1$ (respectivement $(O\vec{x}, \vec{D_2}) = pt_2$), et $\vec{\Delta_1}$ (respectivement $\vec{\Delta_2}$) l'axe issu de O, tel que $(O\vec{x}, \vec{\Delta_1}) = qt_1$ (respectivement $(O\vec{x}, \vec{\Delta_2}) = qt_2$), trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur t_1 et t_2 , pour que les angles $(\vec{D_1}\ ;\ \vec{D_2})$ et $(\vec{\Delta_1}\ ,\ \vec{\Delta_2})$ aient la même bissectrice L.

Cette condition étant remplie, préciser la valeur, à π près, de $(O\vec{x}, L)$.

.../...

I.3 - $\Gamma_{p,q}$ est la courbe lieu du point M, défini par :

(1) $\vec{OM} = [a \cos pt + b \cos qt]\vec{i} + [a \sin pt + b \sin qt]\vec{j}$

$t \in \mathbb{R}$

a) trouver une représentation propre de Γ_{pq}, c'est-à-dire un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que, si t décrit I, M décrit Γ_{pq} une fois et une seule.

b) déduire de la question (I.2) l'existence d'axes de symétrie de la courbe Γ_{pq}, et préciser quels sont ces axes.

- II -

On suppose dans cette partie, que a = b. Les constructions seront faites pour a = 3, l'unité de longueur choisie étant le centimètre.

II.1 - Trouver une représentation polaire de Γ_{pq}, l'axe polaire étant $O\vec{x}$

II.2 - Identifier $\Gamma_{1, -1}$

- III -

a et b sont de nouveau quelconques. On oriente Γ_{pq} dans le sens "t croissant" et on appelle s(t) l'abscisse curviligne de M sur Γ_{pq}, l'origine des abscisses curvilignes étant définie par:

(2) $s(0) = 0$

III.1 - Calculer $\frac{ds}{dt}$

III.2 - En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, p, q pour que Γ_{pq} admette des points stationnaires.

Cette condition étant remplie, et M (to) un point stationnaire de Γ_{pq}, étudier le rang du système

$$\left[\frac{d^2\vec{M}}{dt^2}(to) , \frac{d^3\vec{M}}{dt^3}(to)\right]$$

Donner l'allure de Γ_{pq} au voisinage de M(to).

III.3 - Construire $\Gamma_{3, -1}$ pour a = 3 b = 2

.../...

On considère maintenant que t représente le temps et que E_2 est le plan xOy d'un espace réel E_3 , euclidien, de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

A est le point mobile dont la position à l'instant de date t est définie dans E_3 par :

(3) $$\vec{OA} = (a \cos pt)\vec{i} + (a \sin pt)\vec{j}$$

On considère alors un repère orthonormé direct $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ mobile, par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et dont la position à l'instant t dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est définie par la relation (3) et par :

(4) $$\begin{cases} \vec{I} = (\cos qt)\vec{i} + (\sin qt)\vec{j} \\ \vec{J} = -(\sin qt)\vec{i} + (\cos qt)\vec{j} \\ \vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J} = \vec{k} \end{cases}$$

ainsi, M est un point lié au repère mobile $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

IV. 1 - Déterminer la nature du mouvement instantané de $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Préciser les coordonnées vectorielles, en A, puis en O, du torseur cinématique de ce mouvement instantané. Donner les composantes scalaires de ces coordonnées vectorielles sur $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'une part, et sur $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ d'autre part.

IV.2 - Déterminer l'axe Δ du torseur cinématique à l'instant t par sa position dans le repère $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ et sa position dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Préciser quelles surfaces il décrit dans chacun de ces repères.

IV. 3 - Δ coupe le plan xOy en C. Donner en fonction de $\vec{CM}$ une expression de la vitesse du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Vérifier que cette expression coïncide avec celle qui résulte de l'équation horaire du mouvement donnée au § I.3 (1)

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail